§ Campo escalar complexo ($\hbar = c = e = 1$)

Consideramos ϕ e ϕ^* como campos independentes, com densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi\right]$$

$$= \left[g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi\right]$$

Temos duas eq.s de Lagrange, variação de ϕ^* conduz a uma eq. para ϕ:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^*)} - \frac{\partial}{\partial \phi^*} \mathcal{L} = 0$$

$$= \partial_\alpha \left[g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)\, \delta^\alpha_\nu\right] + m^2 \phi = 0$$

ou

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \phi + m^2 \phi = (\Box + m^2)\phi = 0$$

Da mesma forma, variação de $\phi \Rightarrow$ eq. para ϕ^*

$$(\Box + m^2)\phi^* = 0$$

Agora temos dois momentos canônicos

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \quad , \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}$$

Obtemos densidade Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \cancel{\pi\dot{\phi}} + \pi^*\dot{\phi}^* - \cancel{\pi^*\pi} + \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi + m^2\phi^*\phi$$

$$= \pi^*\pi + \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi + m^2\phi^*\phi\,,$$

com Hamiltoniano:

$$H = \int d^3x \left(\pi^*\pi + \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi + m^2\phi^*\phi\right) \geq 0\,,$$

que temos é positivo definido. O postulado de quantização nos força a considerar os campos como operadores. O campo ϕ não será mais hermitiano:

$$\underset{\text{Class.}}{(\phi,\phi^*)} \longrightarrow \underset{\text{MQ}}{(\phi,\phi^\dagger)}$$

$$(\pi,\pi^*) \longrightarrow (\pi,\pi^\dagger)$$

Quantização:

$$[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)] = [\phi^\dagger(\vec{x},t),\pi^\dagger(\vec{x}',t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})$$

e todos os outros comutadores são nulos. Como $\phi^\dagger \neq \phi$, precisamos introduzir um novo grau de liberdade na expansão de operadores de partículas

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k) e^{-ik\cdot x} + b^\dagger(k) e^{ikx} \right]$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[b(k) e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(k) e^{+ik\cdot x} \right]$$

$$\pi = \dot{\phi}^\dagger = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[-i\omega_k b(k) e^{-ik\cdot x} + i\omega_k a^\dagger(k) e^{ikx} \right]$$

$$\pi^\dagger = \dot{\phi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[-i\omega_k a(k) e^{-ik\cdot x} + i\omega_k b^\dagger(k) e^{ikx} \right]$$

Tentar:

$$\int d^3x \, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \left\{ \omega_{k'} \phi(\vec{x},t) + i\pi^\dagger(\vec{x},t) \right\} =$$

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \left\{ (\omega_{k'}+\omega_k) a(k) e^{-i\omega_k t} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \right.$$
$$\left. + (\omega_{k'}-\omega_k) b^\dagger(k) e^{i\omega_k t} e^{-i(\vec{k}'+\vec{k})\cdot\vec{x}} \right\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left\{ \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')(\omega_{k'}+\omega_k) a(k) e^{-i\omega_k t} + \right.$$
$$\left. + \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')(\omega_{k'}-\omega_k) b^\dagger(k) e^{i\omega t} \right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\omega_{k'}}} \cdot \cancel{2\omega_{k'}} \, a(k') \, e^{-i\omega_{k'} t}$$

Resulta:

$$a(k) = \int d^3x\, e^{ik\cdot x} \left[\omega_k \phi(\vec{x},t) + i \Pi^{+}(\vec{x},t) \right]$$

$$a^{+}(k) = \int d^3x\, e^{-ik\cdot x} \left[\omega_k \phi^{+}(\vec{x},t) - i \Pi(\vec{x},t) \right]$$

Da mesma forma podemos obter os (b, b^{+}):

$$\int d^3x\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \left\{ \omega_{k'} \phi^{+}(\vec{x},t) + i \Pi(\vec{x},t) \right\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \left\{ (\omega_{k'} + \omega_k)\, b(k)\, e^{-i\omega_k t}\, \cancel{e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}} + \right.$$

$$\left. + (\omega_{k'} - \omega_k)\, a^{+}(k)\, e^{i\omega_k t}\, e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left\{ \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')(\omega_{k'}+\omega_k)\, b(k)\, e^{-i\omega_k t} + \right.$$

$$\left. + \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\,(\omega_{k'}-\omega_k)\, a^{+}(k)\, e^{i\omega_k t} \right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\omega_{k'}}} \times \cancel{2\omega_{k'}}\, b(k')\, e^{-i\omega_{k'} t}$$

Resultado:

$$b(k) = \int d^3x\, e^{ik\cdot x} \left\{ \omega_k \phi^{+}(\vec{x},t) + i \Pi(\vec{x},t) \right\}$$

$$b^{+}(k) = \int d^3x\, e^{-ik\cdot x} \left\{ \omega_k \phi(\vec{x},t) - i \Pi^{+}(\vec{x},t) \right\}$$

Testar as relações de comutação:

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \int d^3x \int d^3x'\, e^{ik\cdot x}\, e^{-ik'\cdot x'} \times$$
$$\times \left[\omega_k \phi(\vec{x},t) + i\pi^\dagger(\vec{x},t),\ \omega_{k'} \phi^\dagger(\vec{x}',t) - i\pi(\vec{x}',t) \right]$$

Para o comutador:

$$-i\omega_k \underbrace{\left[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}',t)\right]}_{i\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})} + i\omega_{k'} \left[\pi^\dagger(\vec{x},t), \underbrace{\phi^\dagger(\vec{x}',t)}\right]_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})}$$

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \int d^3x\, e^{i(k-k')\cdot x} \cdot (\omega_k + \omega_{k'})$$
$$= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})\, \cancel{e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t}}^{\,1} (\omega_k + \omega_{k'})$$
$$= (2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})$$

Resultado:

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})$$

Procedemos da mesma forma para os $(b, b^\dagger)$:

$$[b(k), b^\dagger(k')] = \int d^3x \int d^3x'\, e^{ik\cdot x}\, e^{-ik'\cdot x'} \times$$
$$\times \left[\omega_k \phi^\dagger(\vec{x},t) + i\pi(\vec{x},t),\ \omega_{k'} \phi(\vec{x}',t) - i\pi^\dagger(\vec{x}',t) \right]$$

Calculando o comutador:

$$-i\omega_k \underbrace{\left[\phi^{+}(\vec{x},t), \Pi^{+}(\vec{x}',t)\right]}_{i\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})} + i\omega_{k'} \underbrace{\left[\Pi(\vec{x},t), \phi(\vec{x}',t)\right]}_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})}$$

$$\left[b(k), b^{+}(k')\right] = \int d^3x\, e^{i(k-k')\cdot x} (\omega_k + \omega_{k'})$$

$$= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})\, e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t} (\omega_k+\omega_{k'})$$

$$= (2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})$$

Resultado:

$$\left[b(k), b^{+}(k')\right] = (2\pi)^3 2\omega_k\, \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})$$

Todos os outros comutadores são nulos. Encontramos outra vez uma álgebra de bósons, mas agora com duas partículas: (a, a^{+}) e (b, b^{+}).

No caso clássico, a densidade Lagrangiana é invariante por uma transformação de 'gauge' (1ª espécie)

$$\phi \to e^{-i\Lambda}\phi, \quad \phi^{*} \to e^{i\Lambda}\phi,$$

com Λ constante. Essa simetria, via Teorema de Noether, tem uma corrente conservada, que resulta ser a mesma calculada na eq. de continuidade da eq. de Klein-Gordon:

$$J^\mu = i\left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*\right) = (\rho, \vec{J})$$

com $\partial_0 J^0 - \partial_i J^i = \partial_\mu J^\mu = 0 = \partial_0 J^0 + \nabla \cdot \vec{J}$

Escrita na forma $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$

temos: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} \qquad J^\mu = (\rho, \vec{J})$

integrando sobre todo o espaço:

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\, \rho = -\int d^3x\, \nabla \cdot \vec{J} \overset{\text{Gauss}}{=} -\oint_S d\vec{a} \cdot \vec{J}$$

$$= (\text{fluxo em } \infty)$$

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\, J^0 = 0 \Rightarrow \int d^3x\, J^0 = cte.$$

Carga conservada: Q

$$Q \equiv \int d^3x\, J^0$$

$$J^0 = i\left(\phi^* \dot{\phi} - \phi \dot{\phi}^*\right)$$

indo para o campo quântico, a carga é dada por:

$$Q = i :\int d^3x \left(\dot{\phi}^{\dagger} \phi - \dot{\phi}^{\dagger} \phi^{\dagger} \right):$$

$$i \int d^3x \; \phi^{\dagger}(\vec{x},t)\, \Pi^{\dagger}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k \; \cancel{(2\pi)^3}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3k'}{\cancel{(2\pi)^3} \cancel{2\omega_{k'}}} \times \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \times$$

$$i \Big\{ -i\omega_{k'}\, b(k)\, a(k')\, e^{-i(k+k')\cdot x} + i\,\omega_{k'}\, a^{\dagger}(k)\, b^{\dagger}(k')\, e^{i(k+k')\cdot x}$$

$$+ i\omega_{k'}\, b(k)\, b^{\dagger}(k')\, e^{i(k'-k)\cdot x} - i\omega_{k'}\, a^{\dagger}(k)\, a(k')\, e^{i(k-k')x} \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{k'}}\, i \Big[\delta^{(3)}(\vec{k}'+\vec{k}) \Big\{ -i\omega_{k'}\, b(k)\, a(k')\, e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}$$

$$+ i\omega_{k'}\, a^{\dagger}(k)\, b^{\dagger}(k')\, e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t} \Big\} +$$

$$+ \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) \Big\{ i\omega_{k'}\, b(k)\, b^{\dagger}(k')\, e^{i(\omega_{k'}-\omega_k)t} - i\omega_{k'}\, a^{\dagger}(k)\, a(k') \times$$

$$\times e^{-i(\omega_{k'}-\omega_k)t} \Big\} \Big]$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{i}{\cancel{2\omega_k}} \Big[\cancel{2\omega_k}\, i \Big\{ a^{\dagger}(k)\, b^{\dagger}(-k)\, e^{2i\omega_k t} - b(k)\, a(-k)\, e^{-2i\omega_k t} \Big\} +$$

$$+ i\cancel{\omega_k} \Big\{ b(k)\, b^{\dagger}(k) - a^{\dagger}(k)\, a(k) \Big\} \Big]$$

TAMOIO Boas Impressões

$$i\int d^3x\, \phi^+ \dot{\phi} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left\{ b(k)a(-k)e^{-2i\omega_k t} - a^+(k)b^+(-k) \times e^{2i\omega_k t} \right\}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left\{ a^+(k)a(k) - b(k)b^+(k) \right\}$$

$$-i\int d^3x\, \dot{\phi}^+ \phi = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left\{ a^+(-k)\, b^+(k)\, e^{2i\omega_k t} - b(-k)\, a(k)\, e^{-2i\omega_k t} \right\}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left\{ a(k)a^+(k) - b^+(k)b(k) \right\}$$

Na 2ª integração, para a parte não diagonal, trocamos $\vec{k} \to -\vec{k}$ e consideramos a ordem normal, em todas partes. Resulta:

$$Q = i\int d^3x :\left(\phi^+\dot{\phi} - \dot{\phi}^+\phi\right):$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left[a^+(k)a(k) - b^+(k)b(k) \right]$$

Q poderia ser negativa devido às partículas de tipo '(b)', não é positiva definida.

Por outro lado, o Hamiltoniano resulta positivo definido

$$:H: = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \left[a^\dagger(k) a(k) + b^\dagger(k) b(k) \right]$$

Portanto, $a^\dagger$ e $b^\dagger$ podem ser interpretados como operadores de criação para 'partículas' e 'anti-partículas', de cargas opostas, mas da mesma massa.

O operador ρ é re-interpretado, na teoria quântica de campo, como sendo uma densidade de carga.